

Konstruktion und Berechnung von Spiralfeder-Endkurven

Von Prof. Ludw. Strasser

Obwohl die Theorie der Endkurven von Phillips schon seit dem Jahre 1861 bekannt ist, hat sich doch bis jetzt in Bezug auf die Konstruktion dieser Kurven meines Wissens kein bemerkenswerther Fortschritt gezeigt. Am häufigsten finden in der Praxis diejenigen Kurven Anwendung, deren Ende konzentrisch zum Uruhmittelpunkt geformt ist, weil fast alle Uhren mit Spiralfeder versehen und deshalb konzentrische Endformen der Kurven notwendig sind.

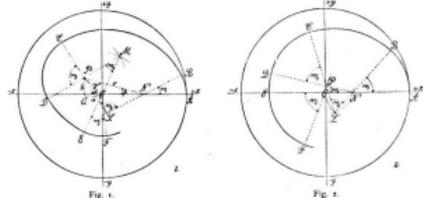
Zur Bestimmung der Kurven bedient man sich heute noch allgemein des bekannten, von Phillips angegebenen graphischen Verfahrens, indem man versuchsweise eine beliebige Kurve, gewöhnlich freihändig, zeichnet und dann diese so lange verändert, bis sie endlich den von Phillips gefundenen Bedingungen entspricht.

So nützlich und bequem im allgemeinen die Anwendung des rein graphischen Verfahrens ist, so ergeben sich für den vorliegenden Fall bei seiner Anwendung wesentliche Ungenauigkeiten, sodaß es wünschenswerth ist, eine allgemeine Konstruktionsmethode zu finden, die der genauen Berechnung zugänglich gemacht werden kann, um den wünschenswerthen Grad von Genauigkeit zu erreichen.

Wenn es ferner gelänge, solche Kurven zu finden, bei denen ein größeres Stück derselben die ursprüngliche Form des anschließenden Spiralmittelpunktes beibehalten könnte, so wäre offenbar die Anwendung dieser Kurven für die Praxis handlicher, und zugleich wäre auch der nicht zu unterschätzende Vortheil erreicht, daß das Gefüge der Spiralfederklänge weniger gewaltsam bei der Herstellung der Kurven beansprucht würde. Unter Berücksichtigung dieser Gesichtspunkte hat der Verfasser die nachstehend beschriebenen Konstruktionen angewandt und glaubt eine zweckentsprechende Lösung der gestellten Aufgabe gefunden zu haben.

Zunächst soll die Anwendung der Konstruktionsmethode an einigen speziellen Fällen gezeigt werden. In Fig. 1 ist angenommen, daß der Radius des konzentrischen Endes der Kurve gleich dem halben Anschließradius der Spirale sein soll.

Man ziehe zunächst durch den Spiralfedermittelpunkt zwei rechtwinklig sich schneidende Linien, mache AN gleich dem halben Spiralfeder-Radius und ziehe aus dem Mittelpunkt O , sowie aus N und einem beliebig gewählten Punkt P Kreisbögen mit dem halben Spiralfeder-Radius, ziehe ferner wiederum mit dem halben Spiralfeder-Radius aus N und P , sowie aus O und P Schnittbögen, so ergeben sich die Einsetzpunkte L und M . Hierauf ziehe man aus L durch N und P und aus M durch O und P Gerade und ziehe endlich aus L und M mit dem äußeren Spiralfeder-Radius Bögen. So ergibt sich die Kurve $AB C D E F$. Bei dieser Kurve haben die Bogenstücke BC und DE die unveränderte Form des anschließenden Spiralmittelpunktes, die Bögen AB, CD und das konzentrische, vorläufig beliebig lang angenommene Kurvenende $E F$ sind mit dem halben Spiralfeder-Radius gezogen.



Diese Kurve erfüllt bei dem beliebig angenommenen Punkt P noch nicht die Bedingungen für isochronische Endkurven. Da sich jedoch der Punkt P unter Beibehaltung derselben Konstruktion beliebig verlagern und auch die Länge des Endstückes EF sich beliebig verändern läßt, so kann die Kurve durch eine veränderte Lage des Punktes P oder durch Längenveränderung von EF , oder endlich durch gleichzeitige Anwendung dieser Veränderungen den Bedingungen genau angepaßt werden.

Das vorstehend beschriebene Konstruktions-Verfahren eignet sich für alle Kurven, deren Radius für das konzentrisch gelegene Ende nicht über zwei Drittel des äußeren Spiralfeder-Radius beträgt.

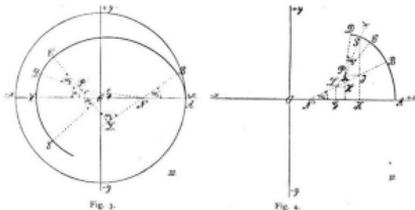
Für den besonderen Fall, daß der Radius des konzentrischen Kurvenendes genau zwei Drittel des äußeren Spiralfeder-Radius beträgt, ergibt sich noch eine Konstruktion, die besonders leicht der Rechnung zugänglich ist.

In Fig. 2 ist $AN = OE = PC = \frac{2}{3}$ des äußeren Spiralfeder-Radius, und die Lage des Punktes P ist so gewählt, daß derselbe auf einem Kreisbogen liegt, dessen Radius $NO = \frac{1}{3}$ des äußeren Spiralfeder-Radius ist. Aus der Zeichnung folgt ohne weiteres, daß der Winkel α_2 und α_3 ganz unabhängig von der Lage des Punktes P stets gleich 60° sind und daß $\alpha_1 = 60^\circ$ Grad $-\alpha_2$ ist.

Für Kurven, deren Endradius größer als zwei Drittel des äußeren Spiralfeder-Radius ist, ergibt sich noch eine Vereinfachung der Konstruktion, weil dann nur vier Kreisbögen, statt fünf, wie bei der vorigen Figur, notwendig sind. In Fig. 3 ist eine solche Kurve, deren Endradius drei Viertel des Spiralfeder-Radius beträgt, dargestellt. Dieselbe besteht aus zwei Bögen, deren Radius $\frac{1}{4}$ eines Bogen, dessen Radius $\frac{1}{2}$ und einem Bogen, dessen Radius gleich dem äußeren Spiralfeder-Radius ist. Aus O ist ein Bogen, dessen Radius OP gleich $\frac{1}{4}$ des Spiralfeder-Radius ist, gezogen, auf dem der Punkt P beliebig angenommen wurde. Aus P und N sind die Bögen AB und CD und aus L der Bogen BC gezogen. Der Punkt L ergibt sich als Schnittpunkt von zwei Bögen aus N und P , deren Radius gleich $\frac{1}{2}$ des Spiralfeder-Radius ist.

Bei dieser Konstruktion läßt sich durch Verlagerung des Punktes P auf dem zugehörigen Kreisbogen und durch Veränderung des Endstückes DE die Kurve den Bedingungen für isochronische Endkurven anpassen.

Vorstehend angeführte Konstruktionen zeigen, daß man für jeden beliebigen Endradius eine Kurve finden kann, die, weil sie auf gesetzmäßige Weise entstanden ist, der Berechnung unterworfen und auf jeden gewünschten Grad von Genauigkeit gebracht werden kann. Hieran anschließend soll nun gezeigt werden, wie die Prüfung der Kurven durch Rechnung erfolgt.



Nach den von Phillips angestellten Untersuchungen hat eine Endkurve folgenden drei Bedingungen zu entsprechen:

1. Die Kurve muß sich tangential, also ohne Knickung, an die Spirale anschließen.

2. Der Schwerpunkt der Kurve muß auf einer Linie liegen, die im Spiralmittelpunkt senkrecht auf der Linie steht, die vom Mittelpunkt der Spirale an den Anschließpunkt der Kurve gezogen ist.

3. Das Produkt aus der Entfernung des Schwerpunktes der Kurve vom Mittelpunkt mit der Länge der Kurve muß dem Quadrate des äußeren Radius der Spirale gleich sein.

Für archimedische Spiralen ergeben sich nach den Untersuchungen des Herrn Jul. Großmann in Locle für die beiden letzten Bedingungen einige kleine Veränderungen, auf die ich bei den folgenden Berechnungen zurückkommen werde. Die erste dieser drei Bedingungen ist durch die angegebenen Konstruktionen ohne weiteres erfüllt. Bezeichnet man die Linie, die durch den Spiralmittelpunkt und den Anschließpunkt der Kurve geht, als die x -Achse, die im Mittelpunkt der Spirale darauf errichtete Senkrechte als die y -Achse, so lassen sich die Bedingungen 2 und 3 auch wie folgt ausdrücken:

Das Moment der Kurve in Bezug auf die x -Achse muß gleich Null und in Bezug auf die y -Achse gleich r^2 sein, wenn r den Radius der Spirale bezeichnet. Statt des Momentes der ganzen Kurve läßt sich auch die algebraische Summe der Momente der Kurvenbestandtheile einsetzen.

Es soll nun zunächst ein allgemeiner Ausdruck für die Schwerpunktskoordinaten eines Kurvenstückes entwickelt werden. In Fig. 4 sei $ABCD$ ein Kurvenstück, das aus den drei Bögen AB, BC und CD zusammengesetzt ist, deren Mittelpunkte N, L und P sind. S sei der Schwerpunkt des Bogens CD und daher $OK = x$ und $KS = y$ dessen Koordinaten. Die aufeinander folgen-

den Radien OA, LB, PC seien r_1, r_2, r_3 , und z_1 sei die Entfernung des Schwerpunktes S vom zugehörigen Bogenmittelpunkt P , endlich sei r der Radius OA der Spirale.

Es ist nun

$$OK = x = ON + NG + LH + PJ$$

$$KS = y = GL + HP + JS,$$

oder wenn w_1, w_2, w_3 die Winkel der aufeinander folgenden Bogen bezeichnen, ist:

$$I. x = (r - r_1) + (r_1 - r_2) \cos w_1 + (r_2 - r_3) \cos (w_1 + w_2) + z_3 \cos \left(w_1 + w_2 + \frac{w_3}{2} \right)$$

$$II. y = (r_1 - r_2) \sin w_1 + (r_2 - r_3) \sin (w_1 + w_2) + z_3 \sin \left(w_1 + w_2 + \frac{w_3}{2} \right)$$

Diese Formeln haben bei gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen der trigonometrischen Funktionen in den verschiedenen Quadranten ganz allgemeine Gültigkeit.

Die Winkel $w_1, w_2, w_3, \dots, w_5$ lassen sich auf Grundlage der Konstruktion ebenfalls durch Rechnung bestimmen. In Fig. 1 seien a, b die Koordinaten des beliebig gewählten Punktes P .

Man hat dann für $NP = c$

$$c = \sqrt{(a + r - r_1)^2 + b^2}$$

und für $OP = d$

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Da ferner allgemein $LN = r - r_1$ und $OM = r_4 - r_3$ ist, so folgt:

$$\sin \frac{w_2}{2} = \frac{c}{2(r - r_1)}$$

$$\sin \frac{w_4}{2} = \frac{d}{2(r_4 - r_3)}$$

Ferner hat man für die $\sphericalangle POQ = \alpha$ und $\sphericalangle PNQ = \beta$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a + r - r_1}$$

Nunmehr ergibt sich ohne weiteres:

$$w_1 = 90^\circ - \frac{w_2}{2} - \beta$$

$$w_3 = 90^\circ - \frac{w_2}{2} + 90^\circ - \frac{w_4}{2} - (\alpha - \beta)$$

oder

$$w_3 = 180^\circ - \left(\frac{w_2}{2} + \frac{w_4}{2} + \alpha - \beta \right)$$

Der Winkel w_2 wird zunächst beliebig gewählt.

Für die in Fig. 3 dargestellte Konstruktion ergeben sich folgende Werthe für die gesuchten Winkel: $\sphericalangle DOH = \alpha$, dessen Schenkel OD den beliebigen Punkt P bestimmt, kann als gegeben angenommen werden.

Da ferner $OP = r_4 - r_3$ und $ON = r - r_1$ ist, so folgt für $\sphericalangle PNH = \beta$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{(r_4 - r_3) \sin \alpha}{(r - r_1) + (r_4 - r_3) \cos \alpha}$$

Für $NP = c$ hat man dann

$$c = \frac{(r_4 - r_3) \sin \alpha}{\sin \beta}$$

Es ist dann $\sin \frac{w_2}{2} = \frac{c}{2(r - r_1)}$, woraus weiter folgt:

$$w_1 = 90^\circ - \frac{w_2}{2} - \beta$$

$$w_3 = 90^\circ - \frac{w_2}{2} - (\alpha - \beta) = 90^\circ - \left(\frac{w_2}{2} + \alpha - \beta \right)$$

Der Winkel w_4 ist zunächst beliebig anzunehmen.

Für die Schwerpunkts-Entfernungen z_1, z_2, z_3 u. s. w. von den Mittelpunkten der aufeinander folgenden Bogen ergibt sich:

$$z_1 = \frac{2r_1 \sin \frac{w_1}{2}}{w_1}, \quad z_2 = \frac{2r_2 \sin \frac{w_2}{2}}{w_2},$$

$$z_3 = \frac{2r_3 \sin \frac{w_3}{2}}{w_3} \text{ u. s. w.}$$

worin für w_1, w_2, \dots die Bogenwerthe dieser Winkel für den Radius = 1 einzusetzen sind.

In den Figuren sind, um eine Anbahnung von Linien zu vermeiden, die Koordinaten der aufeinander folgenden Bogen Schwerpunkte nicht eingezeichnet. Denkt man sich dieselben gezogen und der Reihe nach mit $w_1, w_2, w_3, \dots, w_5; y_1, y_2, y_3, \dots, y_5$ bezeichnet, so ergeben sich nach den unter I und II allgemein entwickelten Formeln für Fig. 1 die auf Seite 241 abgedruckten Werthe.

Bei der Durchführung der Rechnung ergibt sich eine Probe für die Richtigkeit, da die ersten fünf Glieder von x , sowohl als die ersten vier Glieder von y , gleich Null sein müssen, weil der Mittelpunkt des letzten Bogens mit dem Nullpunkt des Koordinatensystems zusammen fällt.

Es ist also:

$$x_3 = z_3 \cos \left(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \frac{w_5}{2} \right)$$

$$\text{und } y_5 = z_5 \sin \left(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \frac{w_5}{2} \right)$$

Nachdem die Koordinaten ermittelt sind, lassen sich die Schwerpunktsmomente der aufeinander folgenden Bogen bestimmen, und man hat gemäß den Bedingungen für die Phillips'schen Kurven die Schlußgleichungen:

$$III. x_1 r_1 w_1 + x_2 r_2 w_2 + x_3 r_3 w_3 + x_4 r_4 w_4 + x_5 r_5 w_5 = 0$$

$$IV. y_1 r_1 w_1 + y_2 r_2 w_2 + y_3 r_3 w_3 + y_4 r_4 w_4 + y_5 r_5 w_5 = r^2$$

worin für w_1, w_2, \dots die Bogenwerthe für den Radius = 1 zu setzen sind.

$$x_1 = (r - r_1) + z_1 \cos \frac{w_1}{2}$$

$$x_2 = (r - r_1) + (r_1 - r_2) \cos w_1 + z_2 \cos \left(w_1 + \frac{w_2}{2} \right)$$

$$x_3 = (r - r_1) + (r_1 - r_2) \cos w_1 + (r_2 - r_3) \cos (w_1 + w_2) + z_3 \cos \left(w_1 + w_2 + \frac{w_3}{2} \right)$$

$$x_4 = r - (r - r_1) + (r_1 - r_2) \cos w_1 + (r_2 - r_3) \cos (w_1 + w_2) + (r_3 - r_4) \cos (w_1 + w_2 + w_3) + z_4 \cos \left(w_1 + w_2 + w_3 + \frac{w_4}{2} \right)$$

$$x_5 = (r - r_1) + (r_1 - r_2) \cos w_1 + (r_2 - r_3) \cos (w_1 + w_2) + (r_3 - r_4) \cos (w_1 + w_2 + w_3) + (r_4 - r_5) \cos (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + z_5 \cos \left(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \frac{w_5}{2} \right)$$

$$y_1 = z_1 \sin \frac{w_1}{2}$$

$$y_2 = (r_1 - r_2) \sin w_1 + z_2 \sin \left(w_1 + \frac{w_2}{2} \right)$$

$$y_3 = (r_1 - r_2) \sin w_1 + (r_2 - r_3) \sin (w_1 + w_2) + z_3 \sin \left(w_1 + w_2 + \frac{w_3}{2} \right)$$

$$y_4 = (r_1 - r_2) \sin w_1 + (r_2 - r_3) \sin (w_1 + w_2) + (r_3 - r_4) \sin (w_1 + w_2 + w_3) + z_4 \sin \left(w_1 + w_2 + w_3 + \frac{w_4}{2} \right)$$

$$y_5 = (r_1 - r_2) \sin w_1 + (r_2 - r_3) \sin (w_1 + w_2) + (r_3 - r_4) \sin (w_1 + w_2 + w_3) + (r_4 - r_5) \sin (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) + z_5 \sin \left(w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + \frac{w_5}{2} \right)$$

Die Lage des Punktes P muß so lange verändert werden, bis obige Gleichungen erfüllt sind. Mitunter läßt sich auch schon durch Kürzung oder Verlängerung des Schlußbogens, dem der Winkel w_5 entspricht, der gewünschte Erfolg erzielen.

Um sich die Rechnungsarbeit zu erleichtern, kann man bei den ersten Versuchskurven das bekannte Verfahren von Phillips anwenden, um zunächst zu einem angenehmen Werth zu gelangen. Bei der darauffolgenden Versuchsrechnung genügt es, die Winkel w_1, w_2, \dots durch den Transporteur zu ermitteln. Nach genügender Annäherung empfiehlt es sich erst, diese Winkel durch die angegebenen Formeln zu bestimmen.

Für die flache Spirale erfahren die Gleichungen III und IV eine kleine Veränderung. Nach den Entwicklungen des Herrn J. Großmann in Loede, sind die Momente für die äußere Kurve $-2ra$ und $r^2 - 1,5a^2$, worin r den äußeren Spiralaradius für den Anschlußpunkt der Kurve bezeichnet und a gleich dem Abstände der Spiralgänge, dividirt durch 2, 3, 1416 ist. Gleichung III müßte also für die äußere Kurve $-2ra$, und Gleichung IV $r^2 - 1,5a^2$ ergeben.

Für die innere Kurve sind die Momente $2ra$ und $-r^2 + 1,5a^2$, worin r den inneren Radius der Spirale für den Punkt bezeichnet, in dem sich die innere Kurve anschließt. Es würde also dann Gleichung III: $2ra$ und Gleichung IV: $-r^2 + 1,5a^2$ ergeben.

Nach der in dieser Abhandlung dargelegten Methode habe ich eine größere Zahl von Kurven, sowohl für cylindrische, als für flache Spiralen konstruirt und berechnet und damit sehr gute Gangresultate erzielt. Die nach dieser Methode hergestellten Spiralkurven ließen sich leicht ausführen und bequem auf ihre Richtigkeit prüfen. Diese Abhandlung enthält einen Theil des Ergebnisses meiner Untersuchungen über Spirale und Unrast, die ich für die von Herrn Geh. Regierungsrat Prof. Dr. Foerster gegründete Vereinigung für Chronometrie ausgeführt habe.