Der Elastizitätsmodul der Spiralfeder

Von Dr. Giebel

Der Gang einer tragbaren Uhr ist in hohem Grade abhängig von der Art des für die Spiralfeder verwendeten Werkstoffes. Besonders unter dem Einfluß der Wärme verhalten sich die verschiedenen Stoffe sehr verschieden. Um den Einfluß der Spiralfeder auf den Gang der Uhr zu erkennen, gehen wir aus von der Huygensschen Gleichung (1657). Die Dauer der Halbschwingung ist

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{D}}. \tag{1}$$

Darin ist T die Dauer der Halbschwingung, in unseren Taschenuhren in der Regel 0,2 sec; π ist die Ludolphsche Zahl = 3,14159, und J das Trägheitsmoment der Unruh, nämlich $J = m \cdot \varrho^2$, worin m die Masse (= Gewicht durch Beschleunigung der Erdanziehung) und ϱ der Trägheitshalbmesser der Unruh ist. D ist das Elastizitätsmoment der Spiralfeder. Es ist abhängig von den Abmessungen der Feder (Stärke s, Breite h, Länge l) und von einem Faktor, der durch die Art des Werkstoffes bestimmt ist, aus dem die Feder hergestellt wurde. Diesen Faktor nennt man den Elastizitätsmodul. Wie man diesen Elastizitätsmodul E, der für die gebräuchlichen Metalle etwa die Größenordnung $10 \div 25 \cdot 10^6$ g/mm²*) hat, bestimmt, werden wir nachher besprechen. Für D erhalten wir den Ausdruck $D = \frac{E \cdot s^3 \cdot h}{12 \cdot l}$.

Setzen wir die Ausdrücke für J und D in unsere Formel (1) ein, so erhält diese die etwas umständlichere Form

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot \varrho^2 \cdot 12 \cdot l}{E \cdot s^3 \cdot h}} \tag{1a}$$

Die Formeln (1) oder (1a) sind zunächst bemerkenswert durch etwas, was **nicht** darin steht. Es fehlt nämlich die Schwingungsweite. Die Schwingungsdauer ist also unabhängig von der Schwingungsweite. Ob die Unruh große oder kleine Schwingungen macht, die Schwingungsdauer ist immer die gleiche. Man nennt diese Eigenschaft den Isochronismus der Spiralfeder. Dieser findet seine Begründung in dem Hookeschen Gesetze (1660): Wie die Spannung, so die Kraft (lateinisch: *ut tensio, sic vis*) oder, in zeitgemäßer Sprechweise: Das Kraftmoment der Spiralfeder steht im einfachen Verhältnis zum Auslenkungswinkel. ($M = D \cdot \alpha$, wo D eben das Elastizitätsmoment ist; α ist der Auslenkungswinkel.) Nun wissen wir aber, daß in der Uhr die Schwingungsdauer der Unruh leider von der Schwingungsweite nicht unabhängig ist. Wir brauchen deshalb noch nicht den Verdacht zu haben, daß das Hookesche Gesetz falsch oder ungenau sei. Der Fehler rührt in erster Linie daher, daß bei der Bewegung der Spiralfeder ihr Schwerpunkt sich verlagert, und daß durch das feste Anstiften der Spiralfeder an der Rolle und besonders am Klötzchen bei der Bewegung gewisse Zusatzspannungen entstehen. Den Fehler kann man beseitigen, wenn man die Enden der Spiralfeder beweglich, nachgiebig befestigt, d. h. die Spiralfeder mit Endkurven versieht, wie es Breguet um 1800 praktisch und Phillips 1860 theoretisch und allgemein angegeben hat.

Wenn nun aber trotzdem noch ein Isochronismusfehler verbleibt — und es scheint so, daß ein gewisses Vorgehen in den kleinen Schwingungen sich durch die Endkurven nicht beseitigen läßt —, so liegt die Vermutung nahe, daß das Hookesche Gesetz doch einer Berichtigung oder Ergänzung bedarf. Das Elastizitätsmoment D scheint nicht ganz unabhängig von der Schwingungsweite zu sein. Wenn man sich den oben angegebenen Wert für D genauer ansieht, so kann man für den Fehler nur den Elastizitätsmodul E verantwortlich machen. Die Frage: „Besteht bei der Biegung einer Feder eine Beziehung zwischen Elastizitätsmodul und Auslenkungswinkel?" hat deshalb zur Zeit eine gewisse Bedeutung. Wir werden darauf am Schlusse unserer Betrachtungen zurückkommen.

Eine andere bedeutsame Frage ist das Verhalten der Schwingungsdauer in den verschiedenen Temperaturen. Um sie zu klären, betrachten wir den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen in Formel (1a). Zunächst tritt hier eine Reihe von Längengrößen auf, im Zähler ϱ^2 und l, im Nenner s^3 und h. Fast alle Körper nehmen bei Erwärmung an Länge zu. Ein Körper von der Länge l_0 erhält bei Erwärmung um t^0 die Länge

$$l_t = l_o \cdot (1 + \gamma \cdot t), \tag{2}$$

worin γ der Ausdehnungsfaktor ist (z. B. für Stahl $\gamma = 0{,}000011$). Nehmen wir an, die (unaufgeschnittene) Unruh bestehe ebenso wie die Spiralfeder aus Stahl, so ergibt sich bei t^0 C der Ausdruck:

$$\frac{\varrho_t^2 \cdot l_t}{s_t^3 \cdot h_t} = \frac{\varrho_0^2 \cdot (1 + \gamma t)^2 \cdot l_0 \cdot (1 + \gamma t)}{s_0^3 \cdot (1 + \gamma t)^3 \cdot h_0 \cdot (1 + \gamma t)} = \frac{\varrho_0^2 \cdot l_0}{s_0^3 \cdot h_0} \cdot \frac{1}{1 + \gamma t}$$

Der Ausdruck hat bei t^0 einen anderen Wert als bei 0^0, und zwar ist er kleiner geworden. Die Wärmeausdehnung verursacht also ein Kleinerwerden der Schwingungsdauer (Formel 1a), d. h., sie verursacht ein Vorgehen in der Wärme. Wir können dieses Vorgehen leicht berechnen. Ist T_1 die Schwingungsdauer bei 1^0 und T_0 die bei 0^0, so ist

$$T_1 = T_0 \left(1 - \tfrac{1}{2} \gamma \cdot 1\right) \cdot \tag{3}$$

γ ist 0,000011, also $\frac{1}{2}\ \gamma \cdot 1 = 0{,}0000055$. Ist T_0 genau gleich 0,2 sec, und multiplizieren wir beide Seiten der Gleichung mit der Schwingungszahl für einen Tag ($n = 432\,000$), so erhalten wir

$$n \cdot T_1 = 86\,400\ (1 - 0{,}0000055) \text{ sec im Tage,}$$
$$= 86\,400 - 0{,}475 \quad \text{„ „ „ .}$$

Die Wärmeausdehnung hat demnach bei Steigerung der Temperatur um 1° ein Vorgehen der Uhr um 0,475 sec oder rund ½ sec im Tage hervorgerufen. Besteht die Unruh aus Messing, so ist dieses Vorgehen geringer.

Wichtiger als diese Tatsache ist eine andere. In der Formel (1a) kommen außer den Längengrößen noch zwei andere vor, m und E. Die Masse m ist unabhängig von der Erwärmung, nicht aber der Elastizitätsmodul E. Wir wissen aus Erfahrung, daß eine Feder in der Wärme erschlafft; der Elastizitätsmodul wird mit wachsender Temperatur kleiner. Nehmen wir an, daß diese Beziehung einfach sei, so können wir sie ähnlich wie die in Formel (2) ausdrücken, nur mit dem Unterschied, daß das Zusatzglied ein negatives Vorzeichen bekommt:

$$E_t = E_0\ (1 - a \cdot t), \tag{4}$$

worin a der Wärmefaktor des Elastizitätsmoduls genannt wird. Da E in der Formel (1a) im Nenner auftritt, so wird der Wert des Bruches bei höherer Temperatur größer; die Schwingungsdauer wird vergrößert, d. h., die Uhr geht in der Wärme nach. Um einen Überblick über die Größenordnung dieses Fehlers zu bekommen, rechnen wir, ebenso wie bei Formel (3):

$$T_1 = T_0 \left(1 + \tfrac{1}{2} a \cdot 1\right) \cdot \tag{5}$$

a ist für Stahl etwa gleich 0,00031, also

$$n \cdot T_1 = 86\,400\ (1 + 0{,}000155) \text{ sec im Tage,}$$
$$= 86\,400 + 13 \quad \text{„ „ „ .}$$

Die Erschlaffung der Spiralfeder bei einer Steigerung der

*) $10^6 = 1\,000\,000$.

Temperatur um 1° ruft somit ein Nachgehen der Uhr um 13 sec hervor.

Eine Erwärmung macht also ihren Einfluß auf den Gang der Uhr in doppelter Weise geltend. Sie bewirkt durch Ausdehnung der Unruh und der Spiralfeder ein geringes Vorgehen, durch Erschlaffung der Spiralfeder ein starkes Nachgehen der Uhr.

Dieser große Einfluß, den die Erschlaffung der Spiralfeder hervorruft, läßt eine genaue Beschäftigung mit dem Elastizitätsmodul der Stoffe, die für Spiralfedern in Frage kommen können, als erwünscht erscheinen. Wie man diesen Fehler bisher bekämpft hat, ist so bekannt, daß hier nur einige Stichworte genügen, um die verschiedenen Verfahren ins Gedächtnis zurückzurufen: 1. Bewegliche Rückerstifte (Harrison 1740, Ellicot 1752, Berthoud, Breguet um 1800). 2. Aufgeschnittene, zweimetallische Unruh (Le Roy 1765, Earnshaw um 1780, Breguet um 1800). 3. Elinvarspiralfeder (Guillaume 1919; mit Zusatzausgleich Paul Ditisheim 1920; mit Straumann-Unruh 1930).

Es besteht noch ein weiterer Grund, das Verhalten der Spiralfeder in der Wärme genauer zu erforschen. Man weiß, daß eine Uhr, auch wenn sie für zwei Temperaturen ausgeglichen war, es doch nicht für alle anderen Wärmegrade ist. So zeigt eine Stahlmessingunruh mit Stahlspiralfeder, die für 0° und 30° ausgeglichen ist, bei 15° ein Vorgehen von 2 bis 4 sec im Tage. Diesen „s e k u n d ä r e n F e h l e r“ habe ich ausführlicher in der Deutschen Uhrmacher-Zeitung, Jahrgang 1928, Nr. 18 und Nr. 40, behandelt. Er rührt daher, daß sowohl bei der Ausdehnung der Körper durch die Wärme als auch bei der Erschlaffung der Federn nicht die einfachen Gesetze gelten, die durch die Formeln (2) und (4) dargestellt sind; es treten dort in Wirklichkeit in den Klammern auch höhere Potenzen der Temperatur auf, so daß die Formeln genauer heißen müssen:

$$l_t = l_0 \, (1 + \gamma t + \gamma_2 \, t^2 + \cdots) \qquad (2a)$$

$$E_t = E_0 \, (1 - a_1 \, t - a_2 \, t^2 \pm \cdots) \qquad (4a)$$

Bis zu einem gewissen Grade läßt sich auch — wie an den oben angegebenen Stellen genauer ausgeführt wurde — der sekundäre Fehler der Spiralfeder durch passende Wahl der beiden Metalle des Unruhreifens (Guillaume-Unruh) ausgleichen.

Aus den vorstehenden Erörterungen erkennt man, daß die Erforschung des Elastizitätsmoduls der verschiedenen für Spiralfedern in Frage kommenden Werkstoffe wichtig ist für 1. den Isochronismus der Spiralfeder, 2. den Wärmeausgleich und 3. den sekundären Wärmeausgleich.

Wie mißt man nun den Elastizitätsmodul? Es gibt in der Mechanik verschiedene Gebiete, in denen die Elastizität eine Rolle spielt; man spricht von Dehnungs-, Verdrehungs- und Biegungselastizität. Bei der Zugfeder und der Spiralfeder handelt es sich vorwiegend um Biegungselastizität. Beim Dreh- oder Torsionspendel, das z. B. in Jahresuhren angewendet wird, tritt die Verdrehungselastizität in Wirksamkeit. Die Dehnungselastizität ist in der Uhrmacherei von geringerer Bedeutung; bei ihr läßt sich aber das Wesen des Elastizitätsmoduls am besten erläutern; deshalb wollen wir zuerst von ihr sprechen.

Ein Draht von 1 mm² Querschnitt sei am oberen Ende fest aufgehängt. Am unteren Ende wird er belastet. Wir können Gewichte bis zu einer gewissen Größe anhängen, ohne daß der Draht in seinem inneren Gefüge merkbar gestört wird. Er dehnt sich unter der Last. Wenn wir ihn aber entlasten, so nimmt er (fast genau) seine ursprüngliche Länge wieder an. Überschreiten wir jedoch in der Belastung eine bestimmte Grenze, so verbleibt bei der Entlastung eine merkbare, dauernde Verlängerung. Wir haben dann die „Elastizitätsgrenze“ überschritten. Bleiben wir innerhalb der Elastizitätsgrenze (genauer gesagt: der Proportionalitätsgrenze), so können wir die durch die Belastung hervorgerufene Verlängerung als im einfachen Verhältnis zur Belastung (und natürlich zur ursprünglichen Länge des Drahtes) stehend ansehen. Bei doppelter Belastung würde also die Verlängerung des Drahtes doppelt so groß werden. Nennen wir die Länge des Drahtes l, seine Verlängerung Δl und die Belastung P, so ergibt sich die Formel

$$\Delta\, l = \alpha \cdot l \cdot P \,.$$

Der Dehnungsfaktor α ist eine sehr kleine Zahl. Man nimmt meist seinen umgekehrten Wert $\frac{1}{\alpha} = E$, und das ist eben unser Elastizitätsmodul. Wir können die Formel dann so schreiben

$$\frac{\Delta\, l}{l} = \frac{P}{E} \,. \qquad (6)$$

Aus den beim Versuch bekannten bezw. meßbaren Größen l, $\Delta\, l$ und P können wir E berechnen. Die Formel (6) läßt auch eine anschauliche Erklärung für E zu. Wenn $\Delta\, l = l$ wird, so muß $E = P$ werden, d. h. E ist das Gewicht, mit dem ein Draht von 1 mm² Querschnitt belastet werden müßte, wenn seine Verlängerung gleich der ursprünglichen Länge werden soll. Das läßt sich bei einem Stahldrahte natürlich nicht verwirklichen, weil die Elastizitätsgrenze, ja sogar die Bruchgrenze bei weitem überschritten würde. Aber bei einem Gummifaden könnte man den Versuch schon anstellen, wenngleich man dabei freilich auch die Querschnittsänderung noch beachten müßte. Der Elastizitätsmodul ist aufzufassen als eine Kraft, bezogen auf die Querschnittseinheit. In den technischen Tabellen (z. B. Hütte) wird er meist in kg/cm² angegeben. Z. B. liest man dort: Federstahl hat einen Elastizitätsmodul von 2 200 000 kg/cm². Wir benutzen passend das Maß g/mm², müßten also diese Zahl mit 1000 multiplizieren und durch 100 dividieren, so daß sich der Elastizitätsmodul zu 22 000 000 g/mm² ergäbe.

Die Verlängerung $\Delta\, l$ ist bei Stahl und ähnlichen Werkstoffen sehr klein. Wenn wir z. B. einen Klaviersaitendraht von 1 m Länge und 1 mm² Querschnitt mit rund 20 kg belasten, so ergibt sich nach Formel (6) eine elastische Verlängerung von 1 mm. Auch mit guten Beobachtungsweisen (Kathetometer) können wir eine solche Größe, die doch einer schon ziemlich beträchtlichen Belastung entspricht, höchstens auf 1 % genau festlegen. Bei dieser Versuchsanordnung sind also die Ergebnisse nicht sehr genau, jedenfalls nicht so genau, wie es für die Kenntnis der Wirkungsweise der Spiralfeder erwünscht ist. Ein genaueres Meßinstrument wäre die Uhr, die — wie wir ja oft so peinvoll empfinden — die vielen kleinen Abweichungen selbsttätig zusammenzählt. Diesen Gedanken hatten sich die beiden Forscher P r o f. J a q u e r o d und D r. M ü g e l i in Neuenburg zu eigen gemacht, indem sie Uhren, die mit Stahl- oder Palladium- oder Elinvar-Spiralfedern ausgerüstet waren, verschiedenen Wärmegraden aussetzten und aus den sich ergebenden Gangabweichungen die Änderungen des Elastizitätsmoduls bei den verschiedenen Wärmegraden bestimmten. Wir haben s. Zt. (Deutsche Uhrmacher-Zeitung, Jahrgang 1928, S. 744 ff.) über diese schönen Untersuchungen berichtet.

Aber das Ergebnis genügte den beiden Gelehrten nicht. So zweckmäßig die Uhr als Meßinstrument erscheint, so werden ihre Angaben doch durch zahlreiche andere Einflüsse mitbestimmt, wie z. B. die Änderung der treibenden Kraft, der Ölverhältnisse, der Übertragung durch die Hemmung, der Abweichung vom Isochronismus, der Elastizität der Unruhreifen usw. Um alle diese Nebeneinflüsse auszuschalten, bauten sie einen möglichst einfachen Apparat in Form eines Drehpendels. An einem Draht hängt eine schwere Scheibe, die, wenn sie aus der Ruhelage gebracht wird, langsame Drehschwingungen vollführt. An der Scheibe ist ein kleiner Spiegel befestigt, der das Bild eines Glühfadens auf eine Skala wirft, auf der es mit Hilfe eines Ablesefernrohres sehr genau beobachtet werden kann. Der Apparat ist in ein Gehäuse eingeschlossen, das elektrisch beheizt werden kann. Der Aufhängedraht besteht aus Elinvar, ist also in seinen elastischen Eigenschaften ziemlich unabhängig von der Temperatur. Zwar zeigte er im Anfang noch erhebliche Sprünge, wurde aber durch geeignete Behandlung im Laufe von zwei Jahren so gealtert, daß nach Verlauf dieser Zeit die Schwingungsdauer des Pendels in den verschiedenen Temperaturen mit hinreichender Genauigkeit einem einfachen Gesetze folgte. Nachdem so der Apparat als zuverlässiges Anzeigeinstrument vorbereitet war, konnten die eigentlichen Untersuchungen beginnen.

An der Scheibe des Drehpendels einerseits und an der inneren Wandung des Gehäuses andererseits wurde eine flache Spiralfeder befestigt, die aus einem ungefähr 1 m langen Drahte von etwa 0,7 mm Durchmesser in 3 bis 6 Umgängen gewunden war. Als Werkstoff für diese Spiralfeder wurden nacheinander verwendet Stahl, Weicheisen, Elinvar, Kupfer, Silber, Gold, Platin, Nickel und Quarz. So war aus dem Drehpendel zugleich eine Unruh mit Spiralfeder geworden. Alle Nebeneinflüsse, sogar die Zapfenreibung, waren ausgeschaltet. Die Schwingungsdauer, die für das einfache Pendel etwa 12 sec betrug, wurde durch Hinzufügung der Spiralfeder auf etwa 4 sec heruntergesetzt, eine Größe, die immer noch gestattete, die Ausschläge genau abzulesen. Aus den genau bekannten Größen des einfachen Drehpendels und den nun beobachteten Größen des Pendels mit Spiralfeder konnten die Größe und die Veränderungen des Elastizitätsmoduls der jeweils aufgesetzten Spiralfeder bestimmt werden.

Die Vorteile dieser Versuchsanordnung leuchten ohne weiteres ein. Gegenüber der Beobachtung der Uhr fallen hier alle unkontrollierbaren Nebeneinflüsse fort, denn die Eigenschaften des einfachen Drehpendels sind genau bekannt und können jederzeit durch Zwischenbeobachtungen wieder nachgeprüft werden. Der Vorteil der selbsttätigen Zusammenzählung der Abweichungen fällt freilich fort, wird aber aufgewogen durch die Möglichkeit sehr genauer Messung der Schwingungsweite und der Schwingungsdauer. Die Genauigkeit der Messung erlaubt auch, mit geringen Schwingungsweiten auszukommen; statt 270° bei der Uhr wurden nur 2½° bis zu ¼° herunter benutzt. Dadurch ist die Gefahr ausgeschaltet, daß durch Gefügeänderungen oder Zusatzspannungen in der Spiralfeder das Ergebnis verfälscht wird. Gegenüber der Dehnungsmessung hat diese Beobachtungsweise den Vorteil, daß unmittelbar die für uns viel wichtigere Biegungselastizität gemessen wird, und daß die Lichtzeigermethode eine beliebige Steigerung der Ablesegenauigkeit zuläßt. Nach alledem läßt sich vermuten, daß durch diese schöne Versuchsanordnung sehr wertvolle Ergebnisse erzielt worden sind.

Beim Bericht über diese Ergebnisse folgen wir Veröffentlichungen, die die beiden Forscher im *Journal suisse d'horlogerie*, Jahrgang 1930, Nr. 1 und 2, und Jahrgang 1931, Nr. 6 und 7, gemacht haben. Bei den oben genannten Werkstoffen für die Spiralfedern wurde Wert gelegt auf möglichste Reinheit. Die Spiralfedern bedurften, ebenso wie wir es für den Aufhängedraht beschrieben haben, einer langwierigen Vorbehandlung durch Tempern, bis sie die nötige Gleichmäßigkeit in ihren Eigenschaften zeigten. Von Nickel wurden zwei Proben untersucht, I: hart gezogen und nur bei 150° getempert, II: weich, bei 600° getempert. Die gefundenen Werte gelten natürlich nur für die untersuchten Proben; sie können aber mit einem kleinen Spielraum als kennzeichnend für die betreffenden Werkstoffe angesehen werden. Als Elastizitätsmodul bei 0° C ergaben sich die in Tabelle I zusammengestellten Werte.

Tabelle I

Elastizitätsmodul E

Stahl (Fe I) .	$22 \cdot 10^6$	g/mm²	Platin (Pt) .	$20 \cdot 10^6$	g/mm²
Eisen (Fe II)	$21{,}5 \cdot 10^6$	„	Nickel, hart		
Elinvar (El) .	$19 \cdot 10^6$	„	(Ni I) . . .	$22 \cdot 10^6$	„
Kupfer (Cu) .	$13 \cdot 10^6$	„	Nickel, weich		
Gold (Au) . .	$8 \cdot 10^6$	„	(Ni II) . . .	$20{,}4 \cdot 10^6$	„
Silber (Ag) .	$9 \cdot 10^6$	„	Quarz (SiO_2)	—)* $\cdot 10^6$	„

Um den Einfluß der Temperatur auf den Elastizitätsmodul festzustellen, wurde der Elastizitätsmodul bei 0° und bei 80° zugrunde gelegt und daraus in der Formel $E_t = E_0 (1 - a t)$ der Faktor a bestimmt. Die Werte sind in Tabelle II zusammengestellt.

Tabelle II

Wärmefaktor a des Elastizitätsmoduls

Stahl	0,000 308	Silber	0,000 575
Eisen	0,000 313	Platin	0,000 075
Elinvar	0,000 045	Nickel I	0,000 311
Kupfer	0,000 399	Nickel II	0,001 056
Gold	0,000 399	Quarz	— 0,000 154

*) Bei Quarz war die Bestimmung des Elastizitätsmoduls nicht möglich, weil die Stärke des Fadens zu unregelmäßig war. Er liegt nach Auerbach und Kohlrausch zwischen 6 und $7 \cdot 10^6$ g/mm².

Durch Einsetzen dieser Werte in die Formel wird E zwischen 0° und 80° und auch noch etwas darüber hinaus bei einer Reihe der untersuchten Stoffe gut angenähert, insbesondere bei Elinvar, Kupfer und Platin. Bei einigen aber ist die Abweichung doch so beträchtlich, daß es sich lohnt, in der genaueren Formel $E_t = E_0 (1 - a_1 t - a_2 t^2)$ die Faktoren a_1 und a_2 zu berechnen. Tut man das, so kommt man zu den in Tabelle II a zusammengestellten Werten.

Tabelle II a

Die Wärmefaktoren a_1 und a_2 des Elastizitätsmoduls

Stahl	0,000 26	0,000 000 7
Eisen	0,000 29	0,000 000 3
Silber	0,000 36	0,000 002 7
Nickel II	0,001 09	— 0,000 000 4
	a_1	a_2

Aus Tabelle I ergibt sich, daß Gold und Silber wegen ihres geringen Elastizitätsmoduls für den praktischen Gebrauch ausscheiden; die daraus gefertigten Spiralfedern würden zu schwer werden. Auch für Kupfer ist der Modul nicht groß; indessen ist z. Zt. über seine praktische Verwertung noch nichts zu sagen, da Kupfer durch einen geringen Zusatz von Beryllium wesentlich elastischer gemacht werden kann, wie das Richard Lange patentierte Verfahren zeigt*). Für Kupfer spricht der sehr geringe Faktor a_2. — Die untersuchte Elinvarprobe zeigt einen verhältnismäßig großen Modul — 19, statt früher $15—17 \cdot 10^6$ —; der Wärmefaktor ist zwar nur ¹/₇ von dem des Stahles, aber doch höher als der von verschiedenen Proben, über die wir 1928 berichten konnten. Es ist eine bekannte Erscheinung, daß die verschiedenen Elinvarblöcke nicht unbeträchtliche Unterschiede in

*) Inzwischen sind über Berylliumlegierungen weitere Tatsachen bekannt geworden, die zu weitgehenden Erwartungen berechtigen. Die in letzter Zeit genannte Legierung Nivarox ist allerdings keine Legierung mit Kupfer, sondern mit einer Art Elinvar (Anm. während der Drucklegung).

ihren Wärmeeigenschaften zeigen; die vorliegende Probe scheint einem weniger gut gelungenen Lose entnommen zu sein. — Gering ist auch der Wärmefaktor von Platin, was überrascht, da das ihm verwandte Palladium einen ungefähr viermal so großen Wärmefaktor hat. — Unverhältnismäßig

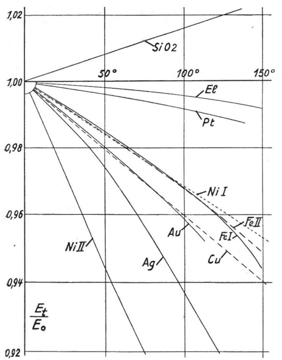

Abb. 1. Änderung des Elastizitätsmoduls verschiedener Stoffe mit der Temperatur, ausgedrückt durch das Verhältnis $\frac{E_t}{E_o}$ E_o = Elastizitätsmodul bei 0 ° C, E_t bei der herrschenden Temperatur

Si O2 = Quarz; El = Elinvar; Pt = Platin; NiI = Nickel, hart; NiII = Nickel, weich; FeI = Stahl; FeII = Eisen; Au = Gold; Cu = Kupfer; Ag = Silber

groß ist der Wärmefaktor von Silber und besonders von stark getempertem Nickel. — Eine Sonderstellung nimmt der Quarz ein, dessen Elastizitätsmodul in dem beobachteten Bereiche mit wachsender Temperatur zunimmt. Wollte man Spiralfedern aus Quarz benutzen — woran wegen der schwierigen Bearbeitung und wegen der Zerbrechlichkeit nicht zu denken ist —, so müßte man zum Ausgleich des Temperaturfehlers eine Unruh benutzen, bei der Stahl außen und Messing innen läge.

In Abbildung 1 ist das Verhalten einiger Stoffe in den verschiedenen Temperaturen graphisch dargestellt. Auf der Waagerechten sind die Temperaturen, auf der Senkrechten die Werte für $\frac{E_t}{E_0}$ aufgetragen.

Noch ein Wort zur Tabelle II a. Der Faktor a_2 ist — wie wir weiter oben ausführten — bestimmend für den sekundären Fehler. Silber würde einen sehr großen sekundären Fehler ergeben und ist auch aus diesem Grunde ungeeignet für Spiralfedern. — Die Werte für Stahl und Eisen scheinen die Behauptung zu stützen, daß hartgewalzte kohlenstoffarme Stahlspiralfedern einen geringeren sekundären Fehler zeigen als kohlenstoffreichere gehärtete. — Beim hochgetemperten Nickel würde der sekundäre Fehler in einem Nachgehen bestehen. Praktische Bedeutung hat diese Erscheinung nicht.

Ein weiteres Ergebnis der Untersuchungen ist die große Verschiedenheit in der inneren Reibung der verschiedenen Spiralfedern, die sich in dem mehr oder weniger schnellen Abklingen der Schwingungen äußert. Während bei einigen Federn die Unruh mehrere Stunden gebrauchte, bis die Schwingungsweite von 160′ auf 16′ gefallen war, vollzog sich dies bei anderen in weniger als einer halben Stunde. Die innere Reibung war sehr groß bei hochgetempertem Nickel, Silber und Gold, etwas geringer bei Eisen, Kupfer und hartgezogenem Nickel und erheblich geringer bei Platin, Quarz, Elinvar und Stahl, welch letztere sich deshalb am besten für Spiralfedern eignen.

Zum Schlusse müssen wir noch auf die Isochronismusfrage zu sprechen kommen. Wir warfen eingangs die Frage auf: Besteht eine Beziehung zwischen Elastizitätsmodul und Schwingungsweite? Veranlaßt ist diese Frage durch die Erscheinung, daß bei tragbaren Uhren, die höchsten Ansprüchen genügen sollen (Seechronometer und sehr feine Deckuhren), sich immer ein Vorgehen in den kleinen Schwingungen zeigt. Dieser Fehler wird auch bei weniger feinen Uhren auftreten, wird aber dort durch andere gröbere Fehler verdeckt. Wenn die Spiralfeder mit Endkurven versehen ist, also bei der Bewegung keine Zusatzspannungen bekommt, so kann die Ursache des Fehlers nur in der Hemmung liegen oder darin, daß die Spiralfeder nicht ganz genau dem Hookeschen Gesetze folgt. Bisher war man meist geneigt, die Hemmung für den Fehler verantwortlich zu machen, obgleich sie ihrem Wesen nach eigentlich die umgekehrte Erscheinung hervorruft.

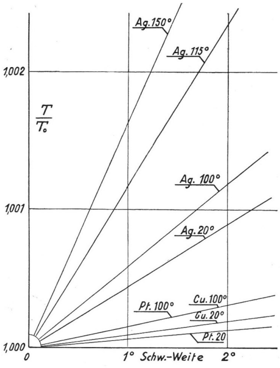

Abb. 2. Abhängigkeit der Schwingungsdauer bei verschiedenen Temperaturen von der Schwingungsweite, ausgedrückt durch $\frac{T}{T_o}$ T_o = Schwingungsdauer bei 0 ° C

Ag = Silber, Cu = Kupfer, Pt = Platin

hervorruft. Die Untersuchungen von Jaquerod und Mügeli zeigen aber, daß die zweite Ursache mindestens mitbestimmend ist, daß nämlich das Elastizitätsmoment (und damit der Elastizitätsmodul) nicht ganz unabhängig von der Schwingungsweite ist. Sie benutzten überhaupt keine Hemmung, und die Zusatzspannung vermieden sie dadurch, daß sie sehr kleine Schwingungsweiten (weniger als 3°) anwandten. Ihre Meßvorrichtung war so fein, daß sie auch sehr kleine Abweichungen feststellen konnten. Trotzdem würden sie die Erscheinung nicht festgestellt haben, wenn sie sich auf die praktisch unmittelbar verwertbaren Stoffe wie Stahl und Elinvar beschränkt hätten; denn bei diesen Stoffen lag die Abweichung unter der Grenze der Beobachtungsgenauigkeit. Indem sie aber den Kreis ihrer Beobachtungen weiter spannten und auch Stoffe heranzogen, von denen sie wußten oder bald erkannten, daß sie für den praktischen Gebrauch nicht geeignet waren, wie z. B. Silber, wurde die Erscheinung deutlich.

Die Abbildung 2 zeigt die Abhängigkeit der Schwingungsdauer T von der Schwingungsweite α für Spiralfedern aus Silber (Ag), Platin (Pt) und Kupfer (Cu) und zwar für verschiedene Temperaturen. Wenn die Abweichungen doch von Zusatzspannungen herrührten, so durften sie nicht bei höheren Temperaturen größer werden, wie es die Abbildung zeigt. Es ist also kaum ein Zweifel daran möglich, daß mindestens für gewisse Stoffe die Schwingungsdauer — wenn auch in geringerem Grade — abhängig ist von der Schwingungsweite, und daß somit das Hooke'sche Gesetz einer kleinen Berichtigung bedarf.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß es noch eine andere Erklärung für diesen Isochronismusfehler gibt, nämlich die Änderung des Trägheitsmomentes der Spiralfeder, worauf A n d r a d e und H a a g hingewiesen haben. Wenn die Spiralfeder sich ein- oder auswickelt, so ändert sich ihr Trägheitsmoment und zwar um so stärker, je größer der Auslenkungswinkel ist. Die Änderung wäre belanglos, wenn die Verkleinerung beim Einwickeln denselben Betrag ausmachte wie die Vergrößerung beim Auswickeln, denn dann hätte die bewegte Spiralfeder während einer ganzen Schwingung (Doppelschwingung) im Mittel dasselbe Trägheitsmoment wie die ruhende Spiralfeder. Leider ist das nicht der Fall; beim Auswickeln wird das Trägheitsmoment um einen größeren Betrag vergrößert, als es beim Einwickeln verringert wird. Infolgedessen werden die größeren Schwingungen nach Formel (1) eine größere Schwingungszeit ergeben oder, anders ausgedrückt: die Uhr geht in den kleinen Schwingungen vor. Beseitigen kann man diesen Fehler nicht, aber man kann ihn verkleinern, indem man zum ersten das Trägheitsmoment der Spiralfeder möglichst klein macht, damit auch die Änderungen möglichst klein werden; zum anderen wird man die Windungszahl möglichst groß machen, damit die Spiralfeder möglichst wenig „atmet", d. h., daß die einzelnen Windungen sich bei der Bewegung möglichst wenig aus ihrer Ruhelage entfernen. Damit ergeben sich für die Spiralfeder in hochwertigen Uhren folgende praktische Forderungen: 1. möglichst kleiner Durchmesser, 2. möglichst große Windungszahl, 3. geringe Höhe (Breite), 4. verhältnismäßig große Stärke. Diese Forderungen lassen sich nur erfüllen, soweit sie anderen nicht widerstreiten.

Die Änderung des Trägheitsmomentes dürfte indessen nicht ausreichen zur Erklärung der oben erwähnten Tatsachen, vor allem nicht der Änderung des Isochronismusfehlers bei wachsender Temperatur, wie sie in Abbildung 2 dargestellt ist, so daß man bis auf weiteres an der Vermutung von J a q u e r o d und M ü g e l i festhalten muß, daß der Elastizitätsmodul nicht unabhängig von der Schwingungsweite ist.

Quelle: Deutsche Uhrmacher-Zeitung Nr.04 v. 20.01. 1934 S. 41/42; Nr.06 v. 03.02.1934 S.66/67; Nr.07 v. 10.02.1934 S.78/79